НАУЧНО-ЗАБАВНАЯ БИБЛІОТЕКА ДЛЯ СЕМЬИ и ШКОЛЫ
(25 выпусковъ).
Подъ редакц. препод. Моск. гимн. **НИК. АМЕНИЦКАГО.**

Выпускъ XXIV.

Кое-что о теоріи вѣроятностей.

СОДЕРЖАНІЕ:

Цѣна 15 коп.

МОСКВА. — 1913.
Складъ изданія у книгоиздательницы **А. С. Панафидиной.**
Лялинъ пер., соб. домъ.

МОСКВА—1913.
Типографія Русскаго Товарищества. Чистые пруды, Мыльниковъ пер., с. д.
Телефонъ 18-35.

Отъ редактора.

Имѣя въ виду все болѣе и болѣе возрастающій интересъ къ *такой* учебно-математической литературѣ, которая затрагиваетъ живые и любопытные вопросы и вмѣстѣ съ тѣмъ возбуждаетъ любознательность, пытливость и самодѣятельность юныхъ читателей,—я полагаю, что предпринятое изданіе «*Научно-забавной библіотеки*» вполнѣ своевременно и желательно.

Стараясь дать интересный подборъ игръ и занятій, составители стремились придать изложенію таковыхъ возможно большую простоту и живость, слѣдя въ то же время и за тѣмъ, чтобы высказываемыя попутно мысли были болѣе или менѣе обоснованы, а *возможность* того или иного вопроса была изслѣдована всесторонне.

Принимая все это во вниманіе, составители позволяютъ себѣ надѣяться, что «*Научно-забавная библіотека*», дѣйствительно, явится для учащейся молодежи средствомъ провести свой досугъ пріятно и съ пользой.

Ник. Амфиницкій.

См. на обор.

Въ непродолжительномъ времени ***выйдутъ въ свѣтъ,*** *между прочимъ,* ***слѣдующіе выпуски*** *«Научно-забавной библіотеки»:*

Вып. 25. Игра въ рулетку.

» 26. Игра «хамелеонъ».— Американская игра съ жетонами.

» 27. Фокусы съ картами, основанные на ариѳметическихъ вычисленіяхъ.

Кое-что о теорiи вѣроятностей.

I. Введенiе.

Въ 1-мъ выпускѣ «*Научно-забавной библiотеки*» намъ уже приходилось немного коснуться того предмета, по поводу котораго мы теперь намѣрены побесѣдовать съ нашими читателями болѣе подробно. А именно, мы говоримъ про описанную тамъ «*игру въ иголку*», основанную всецѣло на *теорiи вѣроятностей*.

Великiй математикъ и физикъ *Лапласъ* даетъ такое опредѣленiе сущности этой теорiи: «каждое явленiе вполнѣ обусловлено и опредѣлено въ своихъ мельчайшихъ подробностяхъ всѣми предшествовавшими ему явленiями, и въ этомъ смыслѣ нѣтъ случайности во всемъ, что происходитъ въ мiрѣ. Но умъ человѣка «невсеобъемлющъ»; весьма часто мы совсѣмъ не знаемъ причинъ явленiя или знаемъ ихъ такъ немного, что не можемъ предвидѣть результата ихъ совмѣстнаго дѣйствiя; тогда этотъ результатъ мы называемъ **случайнымъ явленiемъ**».

Такъ, бросая пару игральныхъ костей, мы совершенно не можемъ предвидѣть, какое число очковъ будетъ на ихъ верхнихъ граняхъ послѣ паденія; точно такъ же мы не сумѣемъ предсказать, сгоритъ ли въ этомъ году домъ сосѣда, сколько градусовъ будетъ въ полдень 10 декабря, а когда измѣряемъ эту температуру, не будемъ знать, не ошиблись ли мы на 0,01°. Тѣмъ не менѣе и въ этомъ мірѣ случайностей, какъ обыденныя житейскія наблюденія, такъ и произведенные опыты вскрываютъ нѣкоторую закономѣрность, дающую основу для нашего предвидѣнія, позволяющую регулировать наше поведеніе относительно враждебныхъ намъ случайностей, подчинить наши ожиданія непогрѣшимымъ выводамъ математическаго анализа; это — **законъ большихъ чиселъ**, названный такъ Пуассономъ *).

Чѣмъ больше число случайныхъ явленій мы наблюдаемъ, тѣмъ болѣе взаимно уравновѣшиваются явленія второстепенныхъ причинъ и выдвигается дѣйствіе главныхъ, постоянныхъ причинъ.

Пожаръ есть случайное явленіе, и потому нельзя предвидѣть, сгоритъ ли въ этомъ году *этотъ* домъ или нѣтъ, но, зарегистровывая большое число пожарныхъ случаевъ за многіе годы, страховыя общества могутъ положиться въ своихъ расчетахъ на то приблизительно постоянное число пожаровъ, которое ежегодно приходится на тысячу страхованій. Подобнымъ же образомъ средняя температура даннаго дня года, выведенная изъ многолѣтнихъ наблюденій, число ежегодныхъ рожденій и

*) *Simon Denis Poisson* (1781—1840)—ученикъ, потомъ преподаватель политехнической школы въ Парижѣ, профессоръ механики въ Сорбоннѣ, членъ академіи и бюро длоготъ).

смертныхъ случаевъ въ данной странѣ, даже числа писемъ безъ адресовъ, опускаемыхъ ежегодно въ почтовые ящики Лондона, — представляютъ числа тѣмъ болѣе постоянныя, чѣмъ длиннѣе былъ рядъ наблюденій, чѣмъ больше число наблюдавшихся явленій. Наблюденія надъ выходомъ извѣстныхъ нумеровъ въ лотереяхъ, при игрѣ въ кости, лото и другихъ азартныхъ играхъ, наконецъ, прямые опыты выясняютъ сущность закона большихъ чиселъ.

Такъ *Р. Вольфъ*, производя **опыты** надъ выпадами двухъ обыкновенныхъ игорныхъ костей и записывая каждый выпадъ, нашелъ, что, напримѣръ, случай вскрытія на обѣихъ костяхъ въ суммѣ семи очковъ повторился 21 разъ въ числѣ первыхъ 100 выпадовъ, 175 разъ, когда число выпадовъ доведено было до 1000, 1682 раза на 10.000 и 16.677 на 100.000 выпадовъ. Отношеніе числа повтореній намѣченнаго выпада къ общему числу сдѣланныхъ опытовъ даетъ числа: 0,21, 0,175, 0,1682, 0,16677; мы получаемъ здѣсь, какъ и въ другихъ наблюденіяхъ этого рода, рядъ величинъ, приближающихся съ возрастаніемъ числа опытовъ, хотя бы и колеблясь, къ нѣкоторому предѣлу. *Теорія вѣроятностей* и находитъ эти предѣлы; не дѣлая опытовъ, можно было заранѣе ожидать извѣстнаго опредѣленнаго отношенія числа повтореній ожидаемаго выпада къ числу всѣхъ возможныхъ.

Чѣмъ чаще повторяется извѣстное явленіе, тѣмъ болѣе вѣроятнымъ становится новое его повтореніе, съ тѣмъ большей увѣренностью мы ожидаемъ его осуществленія. Отсюда возможность дать **математическую мѣру вѣроятности ожидаемаго**

событія a priori. Этой мѣрой, какъ мы уже говорили служитъ отношеніе числа явленій, благопріятныхъ ожидаемому событію, къ числу всѣхъ возможныхъ явленій.

Положимъ въ закрытый сосудъ 29 бѣлыхъ и 19 черныхъ шаровъ равной величины, будемъ вынимать не глядя и каждый разъ класть вынутый шаръ обратно въ урну. Хотя появленія шара того или другого цвѣта равно возможно, тѣмъ не менѣе можно ожидать, что на каждые 48 выемокъ придется 29 бѣлыхъ и 19 черныхъ шаровъ; это ожиданіе, быть-можетъ, и не оправдается для первыхъ 48 опытовъ но, чѣмъ больше этихъ опытовъ будетъ сдѣлано, тѣмъ ближе къ такому распредѣленію подойдутъ числа вынутыхъ бѣлыхъ и черныхъ шаровъ. Отсюда если одинъ (A) будетъ держать пари, что вынется бѣлый, а другой (B), что вынется черный шаръ, и игра будетъ продолжаться достаточно долго, то, при равенствѣ ставокъ обоихъ игроковъ, A всегда навѣрняка останется въ выигрышѣ. Чтобы игра была справедливой, нужно величину ставокъ игроковъ такъ регулировать, чтобы, B отъ 19 выигрышей получалъ столько же, сколько A отъ 29, т.-е. каждый разъ для образованія общей ставки, достающейся выигравшему пари, A долженъ давать $\frac{29}{48}$, а B только $\frac{19}{48}$ всей суммы, т.-е. доли ихъ должны быть пропорціональны вѣроятностямъ вынуть бѣлый или черный шаръ; большій рискъ игрока B уравновѣсится меньшей потерей его при каждомъ проигрышѣ. Такимъ образомъ математическая оцѣнка вѣроятности будущаго можетъ регулировать наши дѣйствія въ виду ожидаемаго событія.

Эта простая мысль математической оцѣнки вѣ-

роятности ожидаемаго событія, положенная въ основу изслѣдованія еще *Паскалемъ* и *Ферматомъ*, была развита *Гюйгенсомъ* и *Яковомъ Бернулли*. Много было сдѣлано для теоріи вѣроятностей и ея приложеній *Гауссомъ* и знаменитымъ творцомъ «небесной механики» *Лапласомъ*.

Въ настоящее время статистика, политическая экономія, государствовѣдѣніе, соціологія вообще— находятъ въ теоріи вѣроятностей цѣнныя указанія, какъ для научныхъ, такъ и для практическихъ приложеній (при устройствѣ пенсіонныхъ кассъ, различныхъ страхованій и тому под.). Здѣсь мы имѣемъ въ виду ограничиться лишь приложеніями наиболѣе общаго интереса—къ оцѣнкѣ путемъ математическаго анализа степени точности данныхъ, добытыхъ наблюденіемъ или опытомъ, къ какой бы научной области они ни относились. Для этой цѣли можно будетъ довольствоваться лишь самыми элементарными предложеніями теоріи вѣроятностей.

Лапласъ, имя котораго уже не разъ здѣсь упоминалось, свою знаменитую книгу «Опытъ философіи теоріи вѣроятностей» заканчиваетъ такими словами:

....«Теорія вѣроятностей есть въ сущности не что иное, какъ здравый смыслъ, сведенный къ исчисленію: она заставляетъ оцѣнивать съ точностью то, что справедливые умы чувствуютъ какъ бы инстинктомъ, часто не умѣя отдать себѣ въ этомъ отчета. Если принять во вниманіе аналитическіе методы, которые возникли изъ этой теоріи, истинность принциповъ, служащихъ ей основаніемъ, утонченную и изящную логику, которой требуетъ примѣненіе ихъ къ рѣшенію задачъ,

учрежденія общественной пользы, опирающіяся на нее, и распространеніе, которое она получила и можетъ еще получить при примѣненіи ея къ важнѣйшимъ вопросамъ натуральной философіи и нравственныхъ наукъ; если затѣмъ замѣтить, что даже въ такихъ областяхъ, которыя не могутъ быть подчинены исчисленію, она даетъ самые вѣрные взгляды, которые могутъ нами руководить въ нашихъ сужденіяхъ, и что она насъ учитъ предохранять себя отъ иллюзій, которыя насъ часто сбиваютъ съ вѣрнаго пути,—мы увидимъ, что нѣтъ науки, болѣе достойной нашихъ размышленій, и что было бы очень полезно ввести ее въ систему народнаго просвѣщенія».

Никто для теоріи вѣроятностей не сдѣлалъ до сихъ поръ столько, сколько Лапласъ, и никто съ бо́льшимъ правомъ, чѣмъ онъ, не можетъ настаивать на необходимости самаго широкаго распространенія этой области математическихъ знаній. Впрочемъ все болѣе и болѣе развивающаяся культурная жизнь народовъ лучше всего доказываетъ справедливость заключеній и требованій Лапласа. Развитіе всякаго рода систематической статистики, вычисленія, связанныя съ самыми тщательными измѣреніями, біометрія, различнаго рода страхованія, сдѣлавшіяся важнымъ факторомъ экономической и соціальной жизни широкихъ народныхъ массъ,—все это основано на математической теоріи вѣроятностей и лучше всего свидѣтельствуетъ о томъ значеніи, которое можетъ имѣть эта наука даже въ повседневномъ обиходѣ каждаго образованнаго человѣка. Мы не сомнѣваемся, что не такъ далеко время, когда теорія вѣроятностей изъ стѣнъ только нѣкоторыхъ высшихъ и специаль-

ныхъ школъ перейдетъ во всѣ среднія наши школы. Сдѣлать это тѣмъ болѣе легко, что изложеніе элементовъ ученія о теоріи вѣроятностей не требуетъ введенія такъ называемой «высшей» математики. Блестящимъ подтвержденіемъ этого служитъ попытка (къ сожалѣнію не вполнѣ законченная) проф. В. П. Ермакова. Въ 1884—85 году въ издававшемся имъ тогда «Журналѣ элементарной математики» почтенный профессоръ помѣстилъ двѣ статьи изъ теоріи вѣроятностей въ элементарномъ изложеніи.

Въ нашемъ дальнѣйшемъ изложеніи мы не преслѣдуемъ, впрочемъ дать систематическое изложеніе задачъ. Рядомъ легкихъ и интересныхъ задачъ, историческими справками и отрывками изъ цѣнныхъ сочиненій по предмету мы дадимъ читателю истинное понятіе о предметѣ.

II. Задачи и игры, основанныя на теоріи вѣроятностей.

1. Задача Кавалера де-Мере.

Два игрока, поставивши поровну, начали игру, условившись, что тотъ, кто раньше выиграетъ извѣстное число партій, получитъ всю ставку. По нѣкоторымъ обстоятельствамъ игра не могла быть окончена и прекратилась въ тотъ моментъ, когда первому игроку не хватало до конца одной, а второму двухъ партій. Спрашивается, какъ игроки должны подѣлить ставку между собою?

Знаменитый Паскаль рѣшилъ эту задачу слѣдующимъ разсужденіемъ:

Первый игрокъ говоритъ второму: «Половина ставки принадлежитъ мнѣ безспорно, такъ какъ даже въ томъ случаѣ, если бы ты выигралъ слѣдующую партію, наши шансы на полученіе цѣлой ставки были бы одинаковы. Что касается второй половины, то шансы наши на ея полученіе одинаковы, а потому раздѣлимъ ее пополамъ».

Значитъ, первый игрокъ получилъ *три четверти*, а второй *одну* четверть всей ставки.

Само собой разумѣется, что оба игрока пред-

полагаются совершенно равносильными другъ другу, что въ костяхъ или картахъ, или въ чемъ бы и чѣмъ бы они не играли, нѣтъ никакой фальши,—словомъ,—окончательный результатъ игры зависитъ отъ случая, равновозможнаго для того и другого игрока,—и на этомъ-то зиждется все рѣшеніе задачи.

Только что рѣшенная задача весьма знаменита въ лѣтописяхъ науки. Задачу эту въ 1654 году кавалеръ *де-Мере* предложилъ для разрѣшенія своему другу, знаменитому *Паскалю*. Рѣшивъ задачу самъ, Паскаль предложилъ рѣшить ее и своему не менѣе знаменитому современнику *Ферма*. Этотъ также не замедлилъ найти рѣшеніе задачи, но другимъ способомъ, и притомъ ужъ не для двухъ только, а для любого числа игроковъ. По поводу каждаго изъ рѣшеній между великими математиками завязалась переписка, и въ результатѣ *было положено основаніе математической теоріи вѣроятностей*, которая съ этого времени дѣлаетъ весьма быстрые успѣхи.

Поэтому страстный игрокъ въ кости, кавалеръ де-Мере можетъ быть также отнесенъ къ числу «основателей» теоріи вѣроятностей.

Заслуга его состоитъ въ томъ, что онъ настойчиво заставлялъ математиковъ рѣшать различныя задачи, на которыя наталкивался самъ во время своей практики игры.

Ранѣе, чѣмъ переходить къ разсмотрѣнію слѣдующихъ задачъ, намъ необходимо нѣсколько ознакомить читателей съ сущностью «игры въ кости».

«Кость» въ данномъ случаѣ есть не что иное, какъ костяной кубикъ, на граняхъ котораго отмѣ-

чены очки: на одной грани—одно очко, на другой—два, на третей—три и т. д. до шести, Игра обыкновенно состоитъ въ томъ, что выбрасываютъ одну или нѣсколько костей, а затѣмъ подсчитываютъ сумму выпавшаго числа очковъ.

Самый простой способъ игры тотъ, когда выбросившій наибольшее число очковъ получаетъ всю ставку, но игру можно разнообразить до безконечности. При каждомъ новомъ условіи, вводимомъ въ игру, является вопросъ: для кого теперь изъ игроковъ существуетъ наиболѣе шансовъ выиграть?

Прекрасному игроку, но плохому математику, кавалеру де-Мере посчастливилось имѣть такого друга, какъ Паскаль. Нѣчто подобное имѣло мѣсто и съ *Галилеемъ*: одинъ изъ его пріятелей также задавалъ ему задачи изъ практики игры въ кости, и геніальный ученый разрѣшалъ ихъ совершенно вѣрно.

Задача 2-ая.

Подбрасывается монета одинъ разъ. Какова вѣроятность, что выпадетъ орелъ?

Здѣсь мы имѣемъ всего два возможныхъ случая: либо орелъ, либо решетка; а за выпаденіе орла имѣется, значитъ, одинъ благопріятный шансъ.

Такъ какъ математическую вѣроятность наступленія ожидаемаго событія мы опредѣлили какъ дробь, въ знаменателѣ которой стоитъ число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, а въ числителѣ число случаевъ благопріятныхъ появленію событія, — то

вѣроятность появленія орла въ данномъ случаѣ выразится такъ: $\frac{1}{2}$ или 0,5.

Задача 3-ья.

Монета подбрасывается вверхъ два раза. Какова вѣроятность, что при этомъ двукратномъ подбрасываніи хотя одинъ разъ появится орелъ?

Подсчитываемъ всѣ возможные случаи. Можетъ случиться, что: орелъ появится при 1-мъ и 2-мъ бросаніи; 2) орелъ при первомъ и решетка при второмъ бросаніи; 3) решетка при первомъ и орелъ при второмъ бросаніи; 4) решетка при первомъ и второмъ бросаніи. Всего 4 случая и случая равновозможныхъ. Въ трехъ изъ нихъ можетъ появляться орелъ. Значитъ, благопріятныхъ появленію орла случаевъ 3, а потому, по опредѣленію для искомой вѣроятности, имѣемъ $\frac{3}{4}$.

Задача 4-ая.

Монету подбрасываютъ послѣдовательно *n* разъ. Какова вѣроятность, что орелъ и решетка будутъ появляться въ извѣстномъ, напередъ заданномъ, порядкѣ?

Появленіе орла или решетки равновозможно при каждомъ бросаніи, т.-е. при каждомъ бросаніи имѣемъ два равновозможныхъ случая. Но

всѣхъ бросаній n, — значитъ, при каждомъ новомъ бросаніи каждые новые два случая будутъ относиться ко всѣмъ предыдущимъ.

Такъ: при 1-мъ бросаніи имѣемъ 2 случая.

» 2-мъ	»	»	$2 \cdot 2 = 2^2$
» 3-мъ	»	»	$2^2 \cdot 2 = 2^3$
.			
» n-мъ	»	»	$2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$.

Итакъ, всѣхъ случаевъ 2^n.

Итакъ, искомая вѣроятность есть $\frac{1}{2^n}$.

Задача 5-ая.

Бросается игральная кость. Опредѣлить величину вѣроятности, что выпадетъ 4 очка.

Въ игральной кости шесть граней, и на нихъ отмѣчены очки отъ 1 до 6.

Подброшенная кость можетъ лечь вверхъ любой изъ этихъ шести граней и показать любое число очковъ отъ 1 до 6. Итакъ, имѣемъ всего 6 равновозможныхъ случаевъ. Появленію же 4-хъ очковъ благопріятствуетъ только одинъ случай. Слѣдовательно, вѣроятность того, что выпадетъ именно 4 очка, равна $\frac{1}{6}$.

Въ случаѣ бросанія одной кости та же вѣроятность, $\frac{1}{6}$, будетъ и для выпаденія всѣхъ остальныхъ очковъ кости.

Задача 6-ая.

Какъ велика вѣроятность получить 8 очковъ, бросивъ двѣ кости одинъ разъ?

Подсчитать число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, могущихъ получиться при бросаніи двухъ костей, не трудно, если исходить изъ такихъ соображеній: каждая изъ костей при бросаніи даетъ одинъ изъ 6 равновозможныхъ для нея случаевъ. Шесть такихъ случаевъ для одной кости сочетаются всѣми способами съ 6-ю же случаями для другой кости, и такимъ образомъ получается всего для двухъ костей $6 \times 6 = 6^2 = 36$ равновозможныхъ случаевъ. Остается подсчитать число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, благопріятствующихъ появленію суммы 8.

При двухъ костяхъ сумма 8 можетъ получиться только слѣдующими способами:

1)	первая	кость	4	очка,	вторая	кость	4	очка.
2)	»	»	6	»	»	»	2	»
3)	»	»	2	»	»	»	6	»
4)	»	»	5	»	»	»	3	»
5)	»	»	3	»	»	»	5	»

Итого случаевъ, благопріятныхъ ожидаемому событію, имѣемъ 5. Слѣдовательно, искомая вѣроятность, что кости выбросятъ въ суммѣ 8 очковъ, равна $\frac{5}{36}$.

Здѣсь можно посовѣтовать читателямъ составить табличку всѣхъ 36 комбинацій, которыя могутъ получиться при бросаніи двухъ костей, и разобраться въ ней.

Задача 7-ая.

Какова вѣроятность того, что, бросая n разъ одну шестигранную кость, мы получимъ n разъ подъ рядъ очко 3?

6 случаевъ равновозможныхъ при каждомъ бросаніи. Слѣдовательно, при

1-мъ бросаніи имѣемъ 6 случаевъ.
2-мъ » » $6 \cdot 6 = 6^2$ случаевъ
3-мъ » » $6^2 \cdot 6 = 6^3$ »
. . . .
n-мъ » » $6^{n-1} \cdot 6 = 6^n$ »

Итакъ, всего при n послѣдовательныхъ бросаніяхъ получается 6^n случаевъ.

Спрашивается же наступленіе такого же событія, появленію котораго каждый разъ благопріятствуетъ только одинъ случай.

Искомая вѣроятность есть $\frac{1}{6^n}$.

Задача 8-ая.

Бросаютъ двѣ кости три раза. Какова вѣроятность того, что хотя одинъ разъ на обѣихъ костяхъ будетъ одинаковое количество очковъ (дублетъ).

Всѣхъ равновозможныхъ случаевъ будетъ $36^3 = 46656$. Дублетовъ при двухъ костяхъ шесть: 1 и 1, 2 и 2, 3 и 3, 4 и 4, 5 и 5, 6 и 6, и при каждомъ ударѣ возможно появленіе какого-либо изъ нихъ. Итакъ, изъ 36 случаевъ 30 ни въ коемъ случаѣ не даютъ дублета. При трехъ же броса-

ніяхъ получается $30^3 = 27000$ недублетныхъ случаевъ. Случаевъ же, благопріятствующихъ появленію дублета, будетъ, значитъ,

$$36^3 - 30^3 = 19656.$$

Искомая вѣроятность есть

$$\frac{19656}{46656} = 0,421.296.$$

Задача 9-ая.

Бросаютъ n разъ двѣ кости. Какова вѣроятность того, что получится n разъ сумма по 7 очковъ.

При n бросаніяхъ возможны 36^n случаевъ. При каждомъ бросаніи появленію требуемаго событія благопріятствуетъ 6 случаевъ. Всего при n бросаніяхъ благопріятствующихъ случаевъ будетъ, слѣдовательно, 6^n.

Вѣроятность искомаго событія:

$$\frac{6^n}{36^n} = \frac{1}{6^n}.$$

Задача 10-ая.

Изъ колоды картъ вынимается одна карта. Опредѣлить вѣроятность появленія: 1) пиковой дамы, 2) какого-либо туза, 3) карты червонной масти, 4) какой-либо фигуры?

Такъ какъ въ колодѣ 52 карты и среди нихъ имѣются 1 пиковая дама, 4 туза, 13 картъ чер-

вонной масти и 12 фигуръ, то искомыя вѣроятности будутъ: $\frac{1}{52}$; $\frac{4}{52}$ или $\frac{1}{13}$; $\frac{13}{52}$ или $\frac{1}{4}$; $\frac{12}{52}$ или $\frac{3}{13}$.

Задача 11-ая.

Имѣются три шкатулки, совершенно одинаковыхъ по внѣшнему виду, въ каждой изъ нихъ по два ящичка, а въ каждомъ ящичкѣ по монетѣ. Въ одной шкатулкѣ только золотыя монеты, въ другой только серебряныя, а въ третьей —въ одномъ ящичкѣ золотая, а въ другомъ серебряная монета. Берутъ одну изъ шкатулокъ (всеравнокакую). Какова вѣроятность найти въ ней въ одномъ изъ ящиковъ золотую, а въ другомъ серебряную монету?

Можно подходить къ рѣшенію задачи двояко:

1.—Шкатулки тождественны. Значитъ равновозможны 3 случая. Благопріятствуетъ появленію событія одинъ. Слѣдовательно искомая вѣрность равна $\frac{1}{3}$.

2.—Взята наугадъ какая-либо изъ шкатулокъ, и въ ней выдвинули одинъ ящикъ. Какова бы ни была найденная тамъ монета, но теперь оказываются возможными только два шанса (случая): во второмъ закрытомъ ящичкѣ шкатулки находится монета такого же металла, что и въ открытомъ, или другого. Изъ этихъ двухъ случа-

евъ одинъ благопріятный ожидаемому нами событію, т.-е., что у насъ въ рукахъ шкатулка съ разными монетами. Такимъ образомъ вѣроятность взять сразу въ руки требуемую шкатулку оказывается равной $\frac{1}{2}$.

Такимъ образомъ, оказывается, что достаточно въ одной изъ шкатулокъ только открыть ящикъ, чтобы вѣроятность изъ $\frac{1}{3}$ обратилась въ $\frac{1}{2}$.

Въ нашихъ разсужденіяхъ, очевидно, должна быть ошибка; и она дѣйствительно въ нихъ есть.

Когда мы открываемъ первый ящикъ въ шкатулкѣ, то остаются возможными два случая, и одинъ только благопріятствуетъ появленію ожидаемаго событія, — это вѣрно; но дѣло въ томъ, что два получающихся случая неравновозможны. Допустимъ, что, открывъ первый ящикъ, мы нашли тамъ золотую монету; въ другомъ, конечно, можетъ быть серебряная, но есть больше основаній утверждать, что въ этомъ закрытомъ ящикѣ находится тоже золотая монета.

Чтобы сдѣлать наше разсужденіе болѣе яснымъ, предположимъ, что у насъ не три, а 30 совершенно одинаковыхъ съ двумя ящичками каштулокъ. 10 изъ нихъ въ обоихъ ящичкахъ содержатъ по золотой монетѣ, 10—по серебряной, а въ третьемъ десяткѣ шкатулокъ—въ одномъ ящичкѣ находится одна золотая, а въ другомъ одна серебряная монета. Откроемъ по одному

ящичку въ каждой изъ шкатулокъ, и мы увидимъ 30 монетъ. 10 изъ нихъ должно быть золотыхъ и 10 серебряныхъ,—это мы можемъ утверждать впередъ навѣрняка. Но относительно 10 остальныхъ ничего напередъ сказать нельзя: онѣ находятся въ шкатулкахъ съ разными монетами, а какія и въ какомъ числѣ при выдвиганіи ящичковъ откроются монеты, зависитъ только отъ случая.

Открывъ 30 ящичковъ, слѣдуетъ ожидать во всякомъ случаѣ, что увидимъ менѣе 20-ти золотыхъ монетъ. Слѣдовательно, вѣроятность, что въ первой взятой наудачу шкатулкѣ другая монета (въ закрытомъ ящичкѣ) золотая, превышаетъ $\frac{1}{2}$.

Задача 12-ая.

Требуется опредѣлить вѣроятность того, что нѣкоторое число, цѣлое или дробное, соизмѣримое или несоизмѣримое, взятое наудачу между 0 и 100 будетъ болѣе 50-ти.

Отвѣтъ, повидимому, ясенъ: число случаевъ, благопріятствующихъ появленію событія, равно половинѣ числа всѣхъ возможныхъ случаевъ. Искомая вѣроятность равна, слѣдовательно, $\frac{1}{2}$.

Но вмѣсто самаго числа, нисколько не мѣняя условій вопроса, можно взять его квадратъ. Если число заключается между 50 и 100, то его квадратъ заключается между 2500 и 10000. Вѣроятность, чтобы взятое *наудачу* между 0 и 10000

число превышало 2500, тоже представляется очевидной: число случаевъ, благопріятствующихъ появленію событія, равно тремъ четвертямъ всѣхъ равновозможныхъ случаевъ. Искомая вѣроятность, значитъ, равна $\frac{3}{4}$.

Обѣ задачи тождественны. Почему же получается такая разница въ отвѣтахъ? Потому, что въ самомъ заданіи нѣтъ надлежащей точности. Противорѣчій подобнаго рода можно подобрать сколько угодно и получать такимъ образомъ новые виды математическихъ софизмовъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ I.

Лапласъ о законности и случайности.

Чтобы показать, къ чему привели изслѣдованія вопроса о той роли, какую играетъ въ теоріи вѣроятностей *случай,* лучше всего привести слѣдующій отрывокъ изъ *„Опыта философіи теоріи вѣроятностей“* Лапласа:

«Всѣ явленія, даже тѣ, которыя по своей незначительности какъ будто не зависятъ отъ великихъ законовъ природы, суть слѣдствія столь же неизбѣжныя этихъ законовъ, какъ обращеніе солнца. Не зная узъ, соединяющихъ ихъ съ системой міра въ ея цѣломъ, ихъ приписываютъ конечнымъ причинамъ или случаю, въ зависимости отъ того, происходили ли и слѣдовали ли они одно за другимъ съ извѣстною правильностью, или же безъ видимаго порядка; но эти мнимыя причины отбрасывались, по мѣрѣ того, какъ расширялись границы нашего знанія, и совершенно исчезли передъ здравой философіей, которая видитъ въ нихъ лишь проявленіе невѣдѣнія, истинная причина котораго—мы сами.

«Всякое имѣющее мѣсто явленіе связано съ предшествующимъ на основаніи того очевиднаго принципа, что какое-либо явленіе не можетъ воз-

никнуть безъ производящей его причины. Эта аксіома, извѣстная подъ именемъ «*принципа достаточнаго основанія*», распространяется даже на дѣйствія, считаемыя безразличными. Воля, самая свободная, не можетъ породить эти дѣйствія безъ побуждающей причины, потому что, если бы она дѣйствовала въ одномъ случаѣ и воздерживалась отъ дѣйствія въ другомъ, при полномъ подобіи всѣхъ обстоятельствъ обоихъ положеній, то выборъ ея былъ бы дѣйствіемъ безъ причины: она была бы, какъ сказалъ Лейбницъ, «слѣпымъ случаемъ эпикурейцевъ». Противоположное мнѣніе есть иллюзія ума, который, теряя изъ виду мелкія причины того или другого выбора воли въ безразличныхъ поступкахъ, убѣждается, что она опредѣляется самою собою и безпричинна.

«Такимъ образомъ мы должны разсматривать настоящее состояніе вселенной какъ слѣдствіе ея предыдущаго состоянія и какъ причину послѣдующаго.

«Умъ, которому были бы извѣстны для какого-либо даннаго момента всѣ силы, одушевляющія природу, и относительное положеніе всѣхъ ея составныхъ частей, если бы вдобавокъ онъ оказался достаточно обширнымъ, чтобы подчинить эти данныя анализу, обнялъ бы въ одной формулѣ движенія величайшихъ тѣлъ вселенной наравнѣ съ движеніемъ легчайшихъ атомовъ: не осталось бы ничего, что было бы для него недостовѣрно, и будущее, такъ же какъ и прошедшее, предстало бы передъ его взоромъ. Умъ человѣческій въ совершенствѣ, которое онъ сумѣлъ придать астрономіи, даетъ намъ представленіе о слабомъ наброскѣ подобнаго разума. Его откры-

тія въ механикѣ и геометріи въ соединеніи съ открытіемъ всемірнаго тяготѣнія сдѣлали его способнымъ понимать подъ одними и тѣми же аналитическими выраженіями прошедшія и будущія состоянія міровой системы. Примѣняя тотъ же методъ къ нѣкоторымъ другимъ объектамъ знанія, нашему разуму удалось подвести наблюдаемыя явленія подъ общіе законы и предвидѣть явленія, которыя будутъ вызваны данными условіями. Всѣ усилія духа въ поискахъ истины постоянно стремятся приблизить его къ Разуму, о которомъ мы только что упоминали, но отъ котораго онъ останется всегда безконечно далекимъ. Это стремленіе, свойственное роду человѣческому, возвышаетъ его надъ животными; и успѣхи его въ этомъ направленіи различаютъ націи и вѣка и составляютъ ихъ истинную славу.

«Припомнимъ, что въ былое время, въ эпоху не очень отъ насъ отдаленную, на дождь или на чрезвычайную засуху, на комету съ сильно растянутымъ хвостомъ, на солнечное затменіе, на сѣверное сіяніе и вообще на необычайныя явленія смотрѣли, какъ на знакъ небеснаго гнѣва. Взывали къ небу, чтобы отвратить ихъ пагубное вліяніе. Небо не молили остановить движеніе планетъ или солнца: наблюденіе скоро дало бы почувствовать всю безполезность такихъ моленій. Но, такъ какъ тѣ явленія, наступаюшія и исчезающія черезъ длинные промежутки времени, казалось, противорѣчили порядку, установившемуся въ природѣ, то люди предположили, что небо порождало и измѣняло ихъ по своему усмотрѣнію въ наказаніе за земные грѣхи. Такъ длинный хвостъ кометы 1456-го года произвелъ па-

нику въ Европѣ, уже приведенной въ ужасъ быстрыми побѣдами турокъ, отъ которыхъ только что пала Византійская имперія. Послѣ того какъ это небесное свѣтило совершило четыре своихъ обращенія, оно возбудило среди насъ очень различный интересъ. Знакомство съ законами системы міра, пріобрѣтенное за этотъ промежутокъ времени, разсѣяло страхъ, порожденный незнаніемъ истинныхъ отношеній человѣка ко вселенной; и Галлей (Halley), признавъ тождество этой кометы съ кометою 1531-го, 1607-го и 1682-го годовъ, предсказалъ слѣдующее ея возвращеніе въ концѣ 1758-го или въ началѣ 1759-го года. Ученый міръ ждалъ съ нетерпѣніемъ этого возвращенія, долженствовавшаго подтвердить одно изъ самыхъ великихъ открытій, сдѣланныхъ въ наукѣ, и исполнить предсказаніе Сенеки, сказавшаго объ обращеніи небесныхъ свѣтилъ, которыя спускаются изъ громадныхъ разстояній: «Наступитъ день, когда, благодаря длившемуся нѣсколько столѣтій изученію, вещи, нынѣ скрытыя, явятся со всею своею очевидностью; и потомки наши изумятся, что столь очевидныя истины ускользали отъ насъ». Тогда Клэро (Clairaut) взялся подвергнуть анализу тѣ возмущенія, которыя комета испытала подъ вліяніемъ двухъ самыхъ большихъ планетъ—Юпитера и Сатурна: послѣ громадныхъ вычисленій онъ назначилъ ея ближайшее прохожденіе черезъ перигелій на начало апрѣля 1759-го года, и наблюденіе не замедлило подтвердить это. Правильность, которую обнаруживаетъ намъ астрономія, безъ всякаго сомнѣнія имѣетъ мѣсто во всѣхъ явленіяхъ. Кривая, описанная простою молекулою воздуха или

пара, опредѣлена такъ же точно, какъ и орбиты планетъ: разницу межъ ними дѣлаетъ только наше незнаніе».

ПРИЛОЖЕНІЕ II.

О. Либманъ о причинности и временной послѣдовательности.

«Основная аксіома причинности, этотъ источникъ и руководящая нить всякой раціональной науки, формулируется, въ своемъ наиболѣе отвлеченномъ видѣ, слѣдующимъ образомъ: съ одной и тою же причиной *a* разъ навсегда связано одно и то же дѣйствіе *b*, такъ что, въ какомъ бы пунктѣ безконечнаго протяженія вселенной и въ какой бы моментъ безконечнаго времени ея существованія ни возникло состояніе или явленіе *a*, изъ него должно послѣдовать состояніе или явленіе *b*. Другими словами: все въ мірѣ совершается по неизмѣннымъ законамъ съ реальною необходимостью. Поэтому принципъ причинности можно также назвать принципомъ полной закономѣрности всего происходящаго. Но какъ бы мы его ни формулировали, онъ составляетъ наиболѣе достовѣрное основное предположеніе всѣхъ реальныхъ наукъ, которыя, всѣ безъ различія, отъ механики и физической астрономіи до физіологіи и патологіи, имѣютъ цѣлью открывать законы соотвѣтственной специальной области явленій,—все равно, дѣлается ли это индуктивнымъ путемъ, т.-е. посредствомъ наблюденія, опыта и обобщенія, либо дедуктивнымъ пу-

темъ, т.-е. логическимъ выводомъ изъ гипотезъ и аксіомъ. Но такъ какъ все происходящее въ этомъ мірѣ — отъ постояннаго кругообращенія звѣздъ, совершающагося съ незапамятныхъ временъ съ грандіозною правильностью, до пляски пылинки, которая, повидимому, прихотливо плаваетъ въ солнечномъ лучѣ, отъ гигантскихъ воздушныхъ теченій земной атмосферы до ощущеній и мыслей человѣческой личности, — совершается по извѣстнымъ законамъ; такъ какъ, далѣе, міровой процессъ, въ общемъ и цѣломъ, есть лишь сумма единичныхъ процессовъ и равнодѣйствующая всѣхъ единичныхъ причинъ, то отсюда вытекаетъ слѣдующее многознаменательное космополитическое положеніе:

«Изъ настоящаго состоянія вселенной неминуемо и необходимо вытекаетъ непосредственно слѣдующее состояніе, изъ послѣдняго — новое, и такъ далѣе до безконечности. Каждое состояніе міра есть эмпирическая суммированная причина послѣдующаго его состоянія и суммированный результатъ его предыдущаго состоянія. Въ нынѣшнемъ днѣ неизмѣнно предопредѣлены завтрашній и послѣзавтрашній дни, подобно тому, какъ во вчерашнемъ и позавчерашнемъ днѣ предопредѣленъ нынѣшній. Поэтому весь міровой процессъ *долженъ* именно такъ протекать, какъ онъ въ дѣйствительности протекаетъ. Все фактическое необходимо, и цѣпь необходимости, которою связаны ряды міровыхъ состояній именно въ такомъ, а не въ какомъ-нибудь иномъ порядкѣ, заключается *въ системѣ законовъ природы*, которымъ подчиняется какъ все въ отдѣльности, такъ и весь міръ въ своей совокупности.

«Такимъ образомъ, строго и безусловно исключается всякая «случайность» въ абсолютномъ значенiи этого слова, т.-е. всякое событiе, которое поэтическая и мечтательная, управляемая желанiями, фантазiя, въ противорѣчiе съ мыслящимъ разсудкомъ, считаетъ возможнымъ внѣ закономѣрной необходимости. Остается такимъ образомъ лишь та, *относительная* случайность, которая состоитъ въ неожиданномъ для насъ совпаденiи двухъ причинныхъ рядовъ, до сихъ поръ протекавшихъ отдѣльно. Если, напр., я иду по улицѣ, и передо мною неожиданно падаетъ тяжелый камень, то я, какъ рѣшительный рацiоналистъ, называю это «случайностью». Почему? Потому что паденiе камня въ данное время и въ данномъ мѣстѣ не было ни причиной, ни слѣдствiемъ моего пребыванiя въ данное время въ данномъ мѣстѣ, а результатомъ ряда причинъ, которыя съ причинами, приведшими меня сюда, не имѣютъ ничего общаго. Я называю это случайностью въ *относительномъ* смыслѣ. Въ *абсолютномъ* же смыслѣ это, разумѣется, не случайность, но, какъ и все прочее, причинно-необходимо, потому что, въ силу существующихъ съ разчичныхъ сторонъ, и какъ результатъ двухъ различныхъ рядовъ причинъ, неминуемо должно было произойти совпаденiе моего проявленiя въ этомъ мѣстѣ съ обваломъ камня. То и другое явилось одновременно необходимымъ слѣдствiемъ непосредственно предшествовавшаго состоянiя вещей...

«Строгая закономѣрность мiрового процесса, какъ въ общемъ, такъ и въ частностяхъ, совпадаетъ съ его *объяснимостью*: если бы эта закономѣрность прекратилась, то и нашъ разумъ былъ бы безси-

ленъ. Откуда происходитъ это убѣжденіе, и насколько безгранична сфера его объективнаго примѣненія, здѣсь не мѣсто обсуждать. Но несомнѣнно его существованіе во всѣхъ мыслящихъ умахъ. Тамъ, гдѣ происходитъ какое-нибудь, повидимому, безпричинное или незакономѣрное событіе—словно громъ среди яснаго неба, - разумъ принимаетъ, что причина и законъ *неизвѣстны*, но не допускаетъ, чтобы ихъ *совсѣмъ не было*. И онъ съ полною увѣренностью стремится къ нахожденію этой неизвѣстной причины или этого еще не открытаго закона, изъ которыхъ съ реальною необходимостью проистекло это, повидимому, случайное явленіе. Если бы, напр., напередъ вычисленное затменіе или сочетаніе звѣздъ не наступило, то астрономъ никогда не предположилъ бы, что здѣсь, въ видѣ исключенія, законъ инерціи или тяготѣнія не оказалъ своего дѣствія; онъ сказалъ бы, что въ его вычисленіи вкралась ошибка, или что какой-нибудь неизвѣстный, но закономѣрно дѣйствующій факторъ, напр., темное невидимое тѣло, послужилъ причиною ненаступленія предвидѣннаго факта. Такимъ безошибочнымъ путемъ, напр., указанъ былъ a priori большой спутникъ Сиріуса, ранѣе невидимый и замѣченный лишь въ послѣднее время. То же было и съ планетой Нептуномъ. Короче говоря, это убѣжденіе, эта аксіома, эта гипотеза, если угодно, неискоренима и оставляетъ надежную руководящую нить науки.

Итакъ «случая» и случайныхъ явленій, въ сущности говоря нѣтъ. Все зависитъ только отъ мѣры и степени нашего знанія. И нѣкоторыя совершающіяся на нашихъ глазахъ явленія мы назы-

ваемъ *случайными* только потому, что всѣхъ причинъ и законовъ, вызывающихъ непремѣнное появленіе именно этого, а не другого, событія, мы не въ состояніи изучить и учесть.

«Положимъ, напримѣръ, что мы бросаемъ монету. Можетъ выпасть орелъ. можетъ выпасть и решетка. То и другое изъ этихъ двухъ явленій произойдетъ на основаніи общихъ физическихъ законовъ и будетъ зависѣть отъ толчка, который мы дадимъ монетѣ при бросаніи, вѣса и формы монеты, сопротивленія воздуха и прочихъ условій. Всѣ эти условія, однако, столь разнообразны, многочисленны и сложны, что нѣтъ возможности обращаться къ ихъ изслѣдованію для того, чтобы предсказать, чѣмъ закончится процессъ бросанія монетъ орломъ или рѣшеткой. Мы и говоримъ, что вскрытіе орла или вскрытіе рѣшетки суть явленія случайныя.

Такимъ образомъ, поговорка «жизнь человѣка состоитъ изъ случайностей»—вполнѣ подтверждается и научными соображеніями.

Заключенiе.

На этомъ мы и закончимъ нашу, правда нѣсколько поверхностную и отрывочную бесѣду по поводу, «теорiи вѣроятностей».

Позднѣе, въ одномъ изъ слѣдующихъ выпусковъ «*Научно-забавной библiотеки*», мы намѣрены все сказанное здѣсь по поводу этой теорiи прослѣдить и подтвердить при разсмотрѣнiи извѣстной и весьма распространенной «*игры* въ рулетку», принципъ которой и самый процессъ игры всецѣло основаны на законахъ теорiи вѣроятностей.

ОГЛАВЛЕНІЕ.